
実験計画法2 ～直交表(3水準)～

西5－607

金 路

2水準直交実験

開発段階

ステップ1)

目標品質が現状レベルとかなり離れている段階には、交互作用も考えて多めの実験をするよりも、交互作用は無視して、考えられるなるべく多くの因子を少ない実験で調べることが多い。

(2週目:2水準直交実験～交互作用なし～)

ステップ2)

目標値に近いレベルまで得られた段階で、交互作用も考慮して、詳細なあるいは最適な条件を探索する

(3週目:2水準直交実験～交互作用あり～)

2水準系と3水準系実験

2水準系の実験

- “現状”対“改善案”のように2水準を設定して、どちらがベターかを比較しながら、最適条件の水準の探索を続けることになる。

3水準系の実験

- 水準の取り方がうまくできれば、ベストの水準を選ぶことも可能である。
- しかし、取り上げることができる因子の数が少ない割には必要な実験数が増える。



< 因子 >	< 水準 >	
温度 A	180℃、220℃、240℃	(3水準) 量的因子
原料の種類 B	甲, 乙	(2水準) 質的因子

直交表の種類

2水準系

$L_8(2^7), L_{16}(2^{15}), \dots$

混合系

$L_{12}(2^{11}), L_{18}(2^1 \times 3^7), \dots$

3水準系

$L_9(3^4), L_{27}(3^{13}), \dots$

直交表(2水準)

表 $L_4(2^3)$

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1
成分	a	b	a b
群	1群	2群	

表 $L_8(2^7)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a	b	a b	c	a c	b c	a b c
	1群	2群		3群			

直交表(3水準)

直交表 : $L_9(3^4)$

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

No.	列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3		1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4		1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5		1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6		1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7		1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8		1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9		1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10		2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11		2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12		2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13		2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14		2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15		2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16		2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17		2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18		2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19		3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20		3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21		3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22		3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23		3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24		3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25		3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26		3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27		3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2
成分記号		a	b	a	a	c	a	a	b	a	a	b	a	a
				b	b ²		c	c ²	c	b	b ²	c ²	b ²	b
									c	c ²			c	c ²
群番号		1	2			3								

直交表の特徴(2水準系)

直交表 : $L_8(2^7)$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

列数
 $L_8(2^7), L_{16}(2^{15}), L_{32}(2^{31}), \dots$
水準数
行数

どの 2列をとっても,
(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)
の組合せが同数回ずつ現れる.

直交表の特徴(3水準系)

直交表 : $L_9(3^4)$

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

$L_9(3^4), L_{27}(3^{13}), L_{81}(3^{40}), \dots$

列数
 水準数
 行数

$$L_{3^k} \left(3^{\frac{3k-1}{2}} \right)$$

どの 2 列をとっても,
 (1,1), (1,2), (1,3),
 (2,1), (2,2), (2,3),
 (3,1), (3,2), (3,3)
 の組合せが同数回ずつ現れる.

直交表とその構成

$$L_{3^k}\left(3^{\frac{3k-1}{2}}\right) \quad L : \text{Latin Square}$$

(1) 行No. ... 実験番号

1行に, 1つの組み合わせ条件の実験が対応し,
実験の内容を示している

(2) 列No. ... 因子を割り付ける列、**1つの列の自由度は2**

(3) 係数 ... 1, 2, 3

表中の数字は, 割り付けられた因子の水準を示す

交互作用と交絡(2水準)

		A×B						
		A	B	↓	C			
		1	2	3	4	5	6	7
1		1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	1	2	2	2	2
3		1	2	2	1	1	2	2
4		1	2	2	2	2	1	1
5		2	1	2	1	2	1	2
6		2	1	2	2	1	2	1
7		2	2	1	1	2	2	1
8		2	2	1	2	1	1	2

任意の2列に割り付けた因子の交互作用は、別にある1列に現れる。

交互作用の列に別の因子を割り付けると、その因子の主効果と交互作用とを区別できなくなる⇒交絡

直交表 $L_8(2^7)$ では、
1列目の因子と、
2列目の因子の間
の 2因子交互作用
は 3列目に現れる。

交互作用と交絡(2水準)

		A×B						
		A	B	↓	C	D		
		1	2	3	4	5	6	7
1		1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	1	2	2	2	2
3		1	2	2	1	1	2	2
4		1	2	2	2	2	1	1
5		2	1	2	1	2	1	2
6		2	1	2	2	1	2	1
7		2	2	1	1	2	2	1
8		2	2	1	2	1	1	2

任意の2列に割り付けた因子の交互作用は、別にある1列に現れる。

- ・線点図
- ・交互作用の表
- ・成分表と掛算のルール

直交表 $L_8(2^7)$ では、
1列目の因子と、
2列目の因子の間
の 2因子交互作用
は 3列目に現れる。

交互作用と交絡(3水準)

直交表 : $L_9(3^4)$

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

任意の2列に割り付けた因子の交互作用は、別の2列に分かれて現れる。
2因子の交互作用は自由度が4である。

- ・線点図
- ・交互作用の表
- ・成分表と掛算のルール

直交表 $L_9(3^4)$ では、
1列目の因子と2列目の因子
の2因子間の交互作用は3列
目と4列目に分かれて現れる。

直交表(3水準)

直交表: $L_9(3^4)$

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2
成分記号	a	b	a	a	c	a	a	b	a	a	b	a	a
			b	b^2		c	c^2	c	b	b^2	c^2	b^2	b
								c	c^2			c	c^2
群番号	1	2			3								

3水準直交実験（交互作用なし）

ある製品の電気出力特性改良のため、次の因子と水準を選んで実験した。技術的に交互作用は考えられない。データの単位はデシベル(dB)で、高い方がよい。

表 因子と水準

記号	因子	水準		
		1	2	3
A	磁性粉の種類	現行	改良1	改良2
B	添加剤の量	現行-20%	現行	現行+20%
C	調液(加工)時間	60分	80分	100分

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順1) 直交表への割り付け

交互作用が無視できるので、A、BとCの3因子をランダムに1～4列に割り付ける。

要 因	A	B	C	e	水準の組合せ		
No. \ 列番	1	2	3	4			
1	1	1	1	1	A_1	B_1	C_1
2	1	2	2	2	A_2	B_1	C_2
3	1	3	3	3	A_3	B_1	C_3
4	2	1	2	3	A_1	B_2	C_3
5	2	2	3	1	A_2	B_2	C_1
6	2	3	1	2	A_3	B_2	C_2
7	3	1	3	2	A_1	B_3	C_2
8	3	2	1	3	A_2	B_3	C_3
9	3	3	2	1	A_3	B_3	C_1

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順2)ランダムな順序で実験を実施し、データを得る。

表 直交表による実験

要 因	A B C e	水準の組合せ			データ (デシベル値)
No.\列番	1 2 3 4				
1	1 1 1 1	A_1	B_1	C_1	1.0
2	1 2 2 2	A_2	B_1	C_2	1.2
3	1 3 3 3	A_3	B_1	C_3	1.3
4	2 1 2 3	A_1	B_2	C_3	1.1
5	2 2 3 1	A_2	B_2	C_1	1.0
6	2 3 1 2	A_3	B_2	C_2	1.4
7	3 1 3 2	A_1	B_3	C_2	1.4
8	3 2 1 3	A_2	B_3	C_3	1.5
9	3 3 2 1	A_3	B_3	C_1	1.6

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順3) 各水準ごとの和を求める

各因子ごとに、第1水準で行われた実験データの合計 T_1 、第2水準で行われた実験データの合計 T_2 と第3水準で行われた実験データの合計 T_3 を求める

表 直交表による実験

要 因	A B C e	水準の組合せ			データ (デシベル値)
No. \ 列番	1 2 3 4				
1	1 1 1 1	A_1	B_1	C_1	1.0
2	1 2 2 2	A_2	B_1	C_2	1.2
3	1 3 3 3	A_3	B_1	C_3	1.3
4	2 1 2 3	A_1	B_2	C_3	1.1
5	2 2 3 1	A_2	B_2	C_1	1.0
6	2 3 1 2	A_3	B_2	C_2	1.4
7	3 1 3 2	A_1	B_3	C_2	1.4
8	3 2 1 3	A_2	B_3	C_3	1.5
9	3 3 2 1	A_3	B_3	C_1	1.6

T_{A1}

T_{A2}

T_{A3}

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順3) 各水準ごとの和を求める

各因子ごとに、**第1水準で行われた実験データの合計 T_1** 、**第2水準で行われた実験データの合計 T_2** と**第3水準で行われた実験データの合計 T_3** を求める

要因	A	B	C	e
列	1	2	3	4
第1水準の和 T_1	3.5 T_{A1}	3.5	3.9	3.6
第2水準の和 T_2	3.5 T_{A2}	3.7	3.9	4.0
第3水準の和 T_3	4.5 T_{A3}	4.3	3.7	3.9
総計T	11.5			

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順4) データの集計から修正項を得る。

$$CT = \frac{(\text{総計})^2}{\text{総データ数}} = \frac{T^2}{9} = \frac{11.5^2}{9} = 14.6944$$

手順5) 総平方和を求める。

$$\begin{aligned} S_T &= \sum (\text{個々のデータの2乗}) - CT = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - CT \\ &= 15.07 - CT = 0.3756 \end{aligned}$$

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順6) 各列の平方和を計算して、各要因の変動を求める。

$$S_i = \frac{(i \text{ 列が第 1 水準であるデータの和})^2}{i \text{ 列が第 1 水準であるデータ数}} \\ + \frac{(i \text{ 列が第 2 水準であるデータの和})^2}{i \text{ 列が第 2 水準であるデータ数}} \\ + \frac{(i \text{ 列が第 3 水準であるデータの和})^2}{i \text{ 列が第 3 水準であるデータ数}} - \text{CT}$$

自由度： $f=2$

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順6) 各列の平方和を計算して、各要因の変動を求める。

$$S_i = \frac{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}{3n} - CT$$

$$S_A = S_1 = 0.2222$$

$$S_B = S_2 = 0.1156$$

$$S_C = S_3 = 0.0089$$

$$S_e = S_4 = 0.0289$$

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順7) 自由度を求める。

$$f_A = f_B = f_C = 2$$

$$f_e = 2$$

$$f_T = \text{総実験数} - 1 = 8$$

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順8) 分散分析表を作成する。

要因	S	ϕ	V	F_0
A	0.2222	2	0.1111	7.69
B	0.1156	2	0.0578	4.00
C	0.0089	2	0.0044	—
e	0.0289	2	0.0144	
計	0.3756	8		

Cをeにプーリングする



要因	S	ϕ	V	F_0
A	0.2222	2	0.1111	11.8*
B	0.1156	2	0.0578	6.12
e'	0.0378	4	0.00945	
計	0.3756	8		

因子Aは有意になった。

3水準の実験の解析(交互作用なし)

手順8) 2水準と同様に、有意な因子の効果を推定する。

$$\hat{\mu}(A_1) = \frac{T_{A_1}}{3} = \frac{3.5}{3} = 1.17$$

$$\hat{\mu}(A_2) = \frac{T_{A_2}}{3} = \frac{3.5}{3} = 1.17$$

$$\hat{\mu}(A_3) = \frac{T_{A_3}}{3} = \frac{4.5}{3} = 1.50$$

まとめ

実験計画法とは、「取り上げる対象の結果にどの要因が影響を与えているのか」「その要因をどのような値に設定すれば結果がどれくらい良くなるのか」などを解析する統計手法の総称です。もともとは、農事試験での応用を目的に、フィッシャー（R.A.Fisher）によって開発されましたが、工業や医療分野をはじめとする様々な分野で活用されています。

まとめ

実験計画法では、特性に影響を及ぼす可能性のある要因（因子と呼びます）を取り上げて、その因子の条件（水準）を変化させます。何水準か設定して実験を行い、得られたデータを解析します。1つの因子を取り上げる方法を1元配置法、2つの場合を2元配置法、3つ以上の場合を多元配置法と呼び、これらはまとめて要因配置実験と呼ばれます。

まとめ

取り上げた因子の数が増加して、全ての水準組み合わせでの実験が現実的に困難なときには、実験回数を削減するための「直交表実験」が活用されます。