July, 2019

情報領域演習第二 第１４回 K演習 (確率論) 宿題

宿題２－１：ポアソン分布

繰り返し起こる同じ事象の発生回数 X は、次の 3 つの条件を満たすとき、ポアソン分布 $Pois\,(\lambda)$ に従うという。

1. 希少性：時間幅 δt の間にちょうど 1 回起こる確率が $\lambda\Delta t + o\,(\Delta t)$、2 回以上起こる確率が $o\,(\Delta t)$
2. 定常性：事象の起こる確率は、時間帯に寄らず共通
3. 独立性：ある時間幅に事象が起きる確率は、それ以前の時間の結果とは無関係

ポアソン分布の確率関数が

$$p\,(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{1}$$

で与えられるとき、以下の問いに答えよ。

1. この確率分布の標本空間と母数空間を答えよ。
2. この確率分布の平均 (X の期待値) を求めよ。
3. この確率分布の分散 ($(X - \mathrm{E}\,[X])^2$ の期待値) を求めよ。
4. この確率分布のモーメント母関数 ($\exp\,(tX)$ の期待値) を求めよ。
5. 前問のモーメント母関数から X の期待値と X^2 の期待値を求めよ。
6. X_1 と X_2 が互いに独立にポアソン分布 $Pois\,(\lambda_1)$ と $Pois\,(\lambda_2)$ に従うとき、X_1 と X_2 の和 $Y = X_1 + X_2$ の確率関数を求めよ。

略解：

ポアソン分布の標本空間は母数によらず非負の整数 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ である。母数空間は $\{\lambda; 0 < \lambda < \infty\}$ である。$\lambda = 0$ を母数空間に含まれない。

ポアソン分布の平均 (X の期待値) は、期待値の式から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{(l)!}, (l = x-1 \text{ とおく}) \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

また、

$$p(l) = \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \tag{2}$$

を利用して、

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} \quad e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!}, (l = x-1 \text{ とおく}) \\
&= \lambda \sum_{l=0}^{\infty} p(l) \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

のように求めることもできる。

ポアソン分布の分散 ($(X - \mathrm{E}[X])^2$ の期待値) は、$\mathrm{E}\left[(X-\lambda)^2\right]$ や $\mathrm{E}\left[X^2\right] - \lambda^2$ を計算するより、確率関数の分母に階乗が含まれることから、$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$ の関係を用いる方が、計算

を間違えにくくなる。

$$\begin{aligned}
V[X] &= E\left[X(X-1)\right] + E\left[X\right] - (E\left[X\right])^2 \\
&= E\left[X(X-1)\right] + \lambda - \lambda^2 \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \sum_{x=2}^{n} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-2)!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{n} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=2}^{n} \frac{\lambda^{x^l}}{l!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned} \tag{3}$$

ポアソン分布のモーメント母関数 $(\exp(tX)$ の期待値) は定義から

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
&= e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}$$

と計算できる。e^{tx} と λ^x の積を $(\lambda e^t)^x$ とまとめるのが鍵である。

ポアソン分布のモーメント母関数 $e^{\lambda(e^t-1)}$ から X の期待値と X^2 の期待値を求める。u ーメント母関数の 1 階微分が期待値になることから

$$\begin{aligned}
M'_X(t) &= \frac{\partial e^{\lambda(e^t-1)}}{\partial t} \\
&= e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t
\end{aligned}$$

を $t = 0$ で評価して

$$\frac{\partial e^{\lambda(e^t-1)}}{\partial t}|_{t=0} = \lambda$$

となり、$E[X] = \lambda$ を得る。同様にモーメント母関数の 2 階微分が分散になることから、 $M''_X(t)$ を $t = 0$ で評価すれば、

$$M''_X(t)|_{t=0} = E\left[X^2\right] = \lambda^2 + \lambda$$

が求まる。これより、分散も λ となる。

$Y = X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数が

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \end{aligned} \tag{4}$$

とポアソン分布の表現に整理できることから、Y もポアソン分布に従い、確率関数が

$$p\left(y; \lambda_1 + \lambda_2\right) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^y e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \tag{5}$$

であることがわかる。

宿題２－２：正規分布

確率変数 X が平均 μ、分散 σ^2 を持つ正規分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従うとき、その確率密度関数は

$$f\left(x; \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{6}$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

1. この確率分布の標本空間と母数空間を答えよ。
2. この確率分布の平均 (X の期待値) を求めよ。
3. この確率分布の分散 ($(X - \mathrm{E}[X])^2$ の期待値) を求めよ。
4. この確率分布のモーメント母関数 ($\exp(tX)$ の期待値) を求めよ。
5. 前問のモーメント母関数から X の期待値と X^2 の期待値を求めよ。
6. X_1 と X_2 が互いに独立に正規分布 $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ と $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ に従うとき、X_1 と X_2 の和 $Y = X_1 + X_2$ の確率密度関数を求めよ。

略解：上の密度関数を持つ正規分布の母数空間は $\left\{\left(\mu, \sigma^2\right); -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\right\}$ であり、標本空間は母数によらず $\{x; -\infty < x < x\}$ である。

正規分布の平均の計算は、どこまでを所与とし、どこから計算すれば良いかの見極めが必要になる。密度関数が与えられているとき、

$$(x - \mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

が直線 $x = \mu$ に関して対象な奇関数となることから、

$$\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = -\int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \tag{8}$$

が示せる。これより

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[x-\mu\right] \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&=\int_{-\infty}^{\mu}(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx+\int_{\mu}^{\infty}(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&=\int_{-\infty}^{\mu}(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx-\int_{-\infty}^{\mu}(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

を得る。よって

$$
E\left[X\right]=\mu \tag{10}
$$

となる。

分散 σ^2 の計算は、部分積分を用いるものと、置換積分を用いるものと、あとモーメント母関数をテイラー展開するもの、があるらしい。以下は部分積分。

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx=1
$$

と

$$
\begin{aligned}
E\left[X\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&=\mu
\end{aligned}
$$

は所与とする。

$$
\begin{aligned}
V\left[X\right]&=E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-(x-\mu)\right\}\left[\left\{-(x-\mu)\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\int\left\{-(x-\mu)\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)+C
$$

より、$\left\{-(x-\mu)\right\}$ と $\left\{-(x-\mu)\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ について部分積分を用いれば

$$
\begin{aligned}
V\left[X\right]&=\left[\sigma^2(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \\
&=\sigma^2
\end{aligned}
$$

を得る。

正規分布のモーメント母関数は

$$\begin{aligned}
M_X(t) = E\left[\exp(tX)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 xt}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\left(\mu + \sigma^2 t\right) x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu - \sigma^2\right)^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu - \sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

のように、積分を変形するだけで得られる。そのためモーメントの計算には、モーメント母関数をテイラー展開しても良い。

モーメント母関数からモーメントを得るには、導関数を $t = 0$ で評価すればいい。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right) \\
&= \left(\mu + \sigma^2 t\right) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right)
\end{aligned}$$

で $t = 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\left(\mu + \sigma^2 0\right) \exp\left(\mu 0 + \frac{\sigma^2}{2} 0\right) \\
&= \mu
\end{aligned} \tag{12}$$

および

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right) \\
&= \left\{\sigma^2 + \left(\mu + \sigma^2 t\right)^2\right\} \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right)
\end{aligned}$$

で $t = 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\left\{\sigma^2 + \left(\mu + \sigma^2 0\right)^2\right\} \exp\left(\mu 0 + \frac{\sigma^2}{2} 0\right) \\
&= \mu^2 + \sigma^2
\end{aligned} \tag{13}$$

より、平均が μ、分散が $\mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$ と求まる。

正規分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ のモーメント母関数が $\exp\left(\mu t + \sigma^2 t^2/2\right)$ であることと、

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\mu_1 t + \sigma_1^2 t^2/2\right) \exp\left(\mu_2 t + \sigma_2^2 t^2/2\right) \\
&= \exp\left(\left(\mu_1 + \mu_2\right) t + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) t^2/2\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

が成り立つことから、$X_1 \sim N\left(\mu_1, {\sigma_1}^2\right)$、$X_2 \sim N\left(\mu_2, {\sigma_2}^2\right)$ で X_1 と X_2 が互いに独立なとき、$X_1 + X_2$ は正規分布 $N\left(\mu_1 + \mu_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2\right)$ に従う。